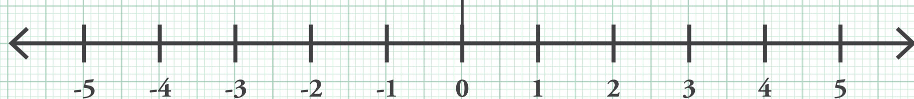
At Right Angles

A Resource for School Mathematics

समान्तर रेखाएँ

पद्मप्रिया शिराली



Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

समान्तर रेखाएँ

इमारतों के कई सारे घटकों में समान्तर रेखाएँ शामिल होती हैं, जैसे कि बीम, खम्भे, खिड़कियाँ, दरवाज़े, खिड़की की सलाखें, फ़र्श की टाइलें आदि। सड़कों पर बनी विभाजन रेखाएँ, रेल की पटरियाँ, बिजली के तार सभी समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं। सड़कें या पैदल यात्री क्रॉसिंग, स्पोर्ट्स कोर्ट, एथलेटिक ट्रैक और हवाई अड्डे के रनवे को चिह्नित करते समय समान्तर रेखाएँ बहुत महत्त्वपूर्ण होती हैं।

हम समान्तरता को देखने के इतने अभ्यस्त होते हैं कि हममें से अधिकांश को एक ट्यूबलाइट का छत के समान्तर न होना या एक तिरछे फ़ोटोफ़्रेम को देखना असहज लगता है।

जब हम इन्हें रोज़मर्रा की वस्तुओं में देखते हैं, तो हमें पूछना चाहिए कि क्या इनका कोई और महत्त्व भी है?



ये ज्यामिति में शामिल कई गुणधर्मों के केन्द्र में स्थित हैं। समान्तर रेखाओं के युग्मों (pair) को पार करती एक तिर्यक छेदी रेखा (transversal line) खींचने पर जो कोण बनते हैं उनमें विशेष गुणधर्म होते हैं।

इस पुलआउट में हम समान्तर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखाओं के गुणधर्मों की पड़ताल करने वाले हैं। किसी भी ज्यामितीय समस्या को हल करने के लिए ज्ञान के साथ-साथ ज्यामितीय नज़र विकसित करना ज़रूरी है। इसलिए, ज्यामिति के शिक्षण में हमें बच्चों में कुछ ऐसे कौशल विकसित करना चाहिए जो ज्यामितीय नज़र से देखने में मदद करें। यह ज्यामितीय नज़र कैसे विकसित होती है?

तीस वर्षों की अवधि के दौरान मैं उन बच्चों से मिली हूँ, जो विज़ुअल पॉज़र्स से जुड़ी बहुत सारी गतिविधियों से अवगत थे। उन्हें प्राथमिक स्कूल के वर्षों में जिग्सा पज़ल्स से खेलने, छिपी हुई आकृति को खोजने, दृश्य पैटर्नों को ख़ोजने आदि गतिविधियाँ करने का मौक़ा मिला था। मैंने नोटिस करना शुरू किया कि बच्चों के इन दो समूहों ने जिस तरीक़े और कौशल से किसी सवाल को हल किया, वे काफ़ी अलग थे। जिन बच्चों के पास दृश्य चुनौतियों से जूझने के अधिक अवसर और आकृतियों से सम्बन्धित गतिविधियों का अधिक अनुभव था, उनमें समस्या की कल्पना करने और उसका विश्लेषण करने की अधिक क्षमता थी। हालाँकि कोई भी व्यक्ति दृश्य निपुणता विकसित करने में मदद करने वाले अनुभवों के बारे में पूर्ण निष्कर्ष नहीं निकाल सकता है, लेकिन मैं इस बारे में यह बात पूरे यक़ीन से कह सकती हूँ कि बच्चों को दृश्य चुनौतियों से अवगत कराने से लाभकारी प्रभाव पड़ता है। इसके अलावा, जो आप ढूँढ़ रहे हैं उसके बारे में एक बुद्धिमानी भरा अनुमान लगाना और ज्यामितीय अवधारणाओं के बारे में बेहतर ज्ञान होना इस प्रक्रिया में सहायता करता है।

ज्यामितीय सवालों में बच्चों को किसी विशिष्ट वस्तु या सम्बन्ध का पता लगाने की ज़रूरत होती है। उदाहरण के लिए, X (शीर्षाभिमुख कोण); आसन्न सम्पूरक कोणों की एक जोड़ी; रेखाओं की एक जोड़ी जो एक-दूसरे पर लम्ब हों; या समरूप त्रिभुजों (similar triangle) की एक जोड़ी; और एक ऐसी आकृति में इन सभी का पता लगाना जिसमें कई आड़ी-तिरछी रेखाएँ, कोण और त्रिभुज हैं। कई बार, हमें इनमें से कुछ चीज़ों को खोजने के लिए आकृति को घुमाना पड़ सकता है। इस खोज के लिए आपको प्रासंगिक जानकारी पर ध्यान केन्द्रित करने और बाक़ी डेटा को अनदेखा करने की आवश्यकता होती है। एक तरह से, आपको अप्रासंगिक डेटा के लिए अपनी आँखें बन्द करनी पड़ती हैं।

हम इस ज्यामितीय नज़र को कैसे विकसित करें? इसके लिए हमें किन कौशलों पर ज़ोर देने की आवश्यकता है? ऐसी कुछ चीज़ों को मैं यहाँ सूचीबद्ध कर रही हूँ :

- छिपी हुई ज्यामितीय आकृतियों को ख़ोजना।
- समकोणों और ऋजु कोणों (straight angle) को ख़ोजना।
- समान रेखाखण्डों, लम्ब रेखाओं और समान्तर रेखाओं के युग्म ख़ोजना।
- एक-दूसरे के सापेक्ष घूमने वाली आकृतियों की जोड़ियों को ख़ोजना।
- एक ही आकृति को विभिन्न अभिमुखों (orientation)— ऊपर-नीचे, दाएँ-बाएँ —के माध्यम से देखना।
- प्रतिच्छेदी आकृतियों में उभयनिष्ठ रेखाखण्ड या कोण ज्ञात करना।
- उन आकृतियों को ख़ोजना जो एक-दूसरे के प्रतिबिम्ब (reflection) और घूर्णन (rotation) से बनी हों। सममिति व पैटर्न ख़ोजना।
- किसी चित्र की कुछ विशेषताओं को छिपाना और कुछ अन्य को अपनी उँगली या हाइलाइटर की मदद से हाइलाइट करना।

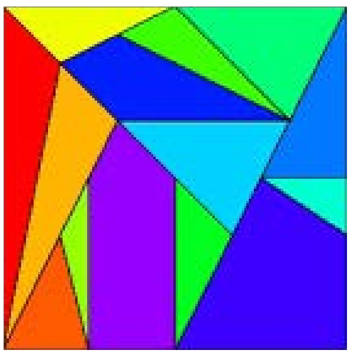
की-वर्ड : *समान्तर रेखाएँ, विज़ुअलाइजेशन, पैटर्न, सममिति, कोण, तिर्यक छेदी रेखा*

गतिविधि 1

उद्देश्य : सामान्य प्रकार की प्रारम्भिक दृश्य गतिविधियाँ करना।

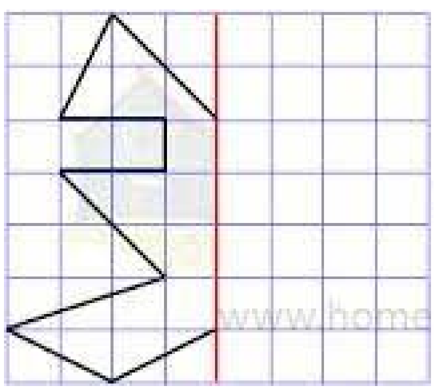
यहाँ दी गई अधिकांश गतिविधियाँ स्व-व्याख्यात्मक हैं। इन सभी का उद्देश्य अवलोकन कौशल को बढ़ाना है। इनमें तर्क लागू करना, सममिति को पहचानना, घूर्णन की कल्पना करना और ज्यामितीय अवधारणाओं को समझना शामिल है।

जिग्सा पज़ल : एक वर्ग का ख़ाका बनाएँ। उसे विभिन्न आकृतियों में काटें और बच्चों को इन टुकड़ों को जोड़कर वापिस वर्ग बनाने के लिए कहें।



चित्र-1

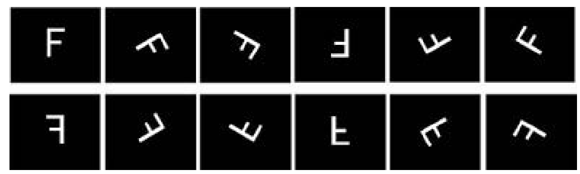
दिए गए प्रतिबिम्ब को पूरा करें।



चित्र-2

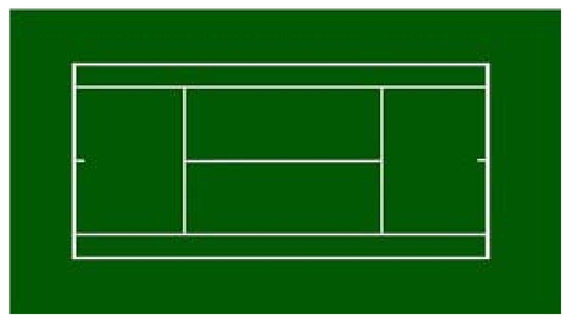
वर्ग A और B की सापेक्ष स्थितियों का वर्णन करें।

यहाँ पर अक्षर F के प्रतिबिम्ब और F के घूर्णन से बनी कुछ आकृतियाँ दी गई हैं। P के प्रतिबिम्ब और इसके घूर्णन से बनने वाली कुछ आकृतियाँ बनाएँ।

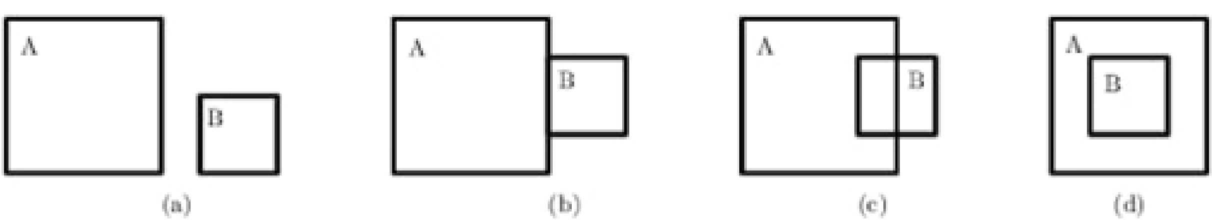


चित्र-3

इस चित्र में आपको कितने आयत दिखाई दे रहे हैं?



चित्र-4



चित्र-5

गतिविधि 2

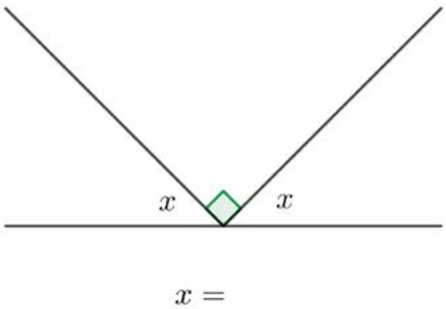
उद्देश्य : आवश्यक ज्यामितीय तथ्यों के पुनरावलोकन के लिए प्रारम्भिक गतिविधियाँ करना।

पूरक कोणों और सम्पूरक कोणों के गुणधर्म।

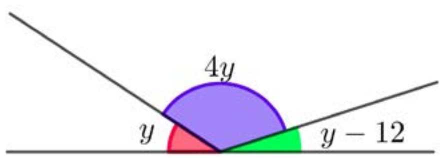
एक सरल रेखा पर बने कोणों का योग 180 अंश होता है।

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बने सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

किसी बिन्दु पर बने कोणों का योग 360 अंश होता है।



चित्र-6

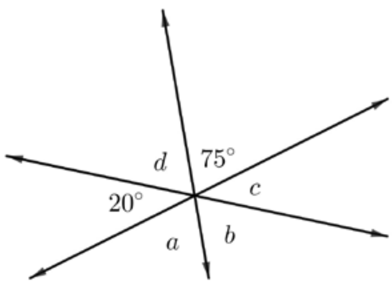


चित्र-7

यदि X = 20 अंश और Y इसका सम्पूरक है, तो Y - X क्या होगा?

यदि L = 50 अंश, M और L पूरक हैं और N, M का सम्पूरक है, तो N का मान क्या होगा?

चित्र-8 में a, b, c और d का मान क्या होगा?



चित्र-8

गतिविधि 3

उद्देश्य : समान्तर रेखाओं की अवधारणा से परिचय कराना, परिभाषा।



चित्र-9



चित्र-10



चित्र-11

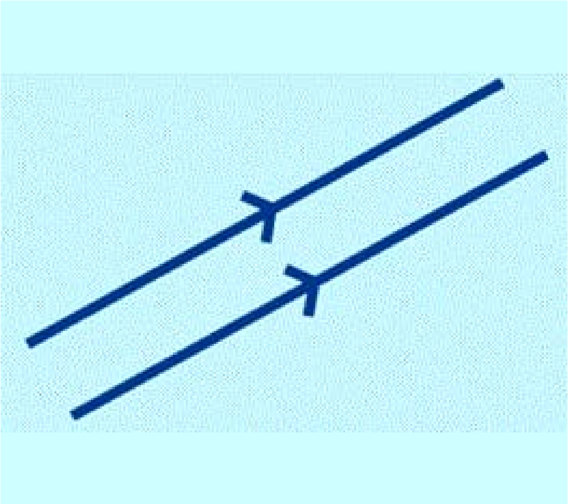
बच्चों को ये चित्र दिखाएँ और उनसे यह बताने के लिए कहें कि उन्होंने इनमें क्या देखा।

इन सभी तस्वीरों में उन्हें कौन-सी बात समान दिखी?

उनसे पूछें कि क्या ये रेखाएँ कभी मिलेंगी। शुरुआत में अपने शब्दों में समान्तर रेखाओं को परिभाषित करने में उनकी मदद करें। इसके बाद ही उन्हें परिभाषा बताएँ।

समान्तर रेखाएँ ऐसी रेखाओं का युग्म होती हैं जो एक ही तल पर स्थित होती हैं और एक-दूसरे से कभी नहीं मिलतीं, चाहे हम उन्हें दोनों सिरों से कितना भी आगे क्यों न बढ़ाएँ।

यह महत्त्वपूर्ण है कि रेखाएँ एक ही तल पर स्थित होनी चाहिए। मेज़ पर खींची गई एक रेखा और बोर्ड पर खींची गई एक रेखा भी कभी आपस में नहीं मिल सकती हैं, लेकिन इसका मतलब यह नहीं है कि वे समान्तर रेखाएँ हैं।



चित्र-12

गतिविधि 4

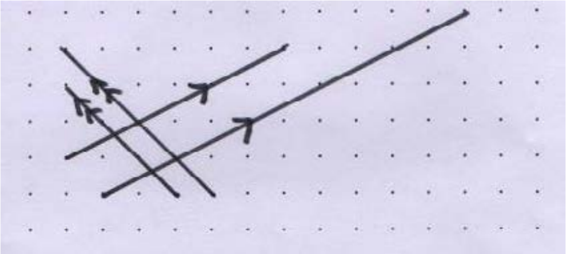
उद्देश्य : समान्तर रेखाओं को ख़ोजना।

शिक्षक के लिए टिप्पणी : बोर्ड या ज़मीन पर बने चित्र समान्तर रेखाओं के केवल सन्निकटीकरण (approximation) हैं।

बच्चों को कक्षा में विभिन्न वस्तुओं को देखने और उनमें समान्तर रेखाओं को खोजने के लिए कहें।

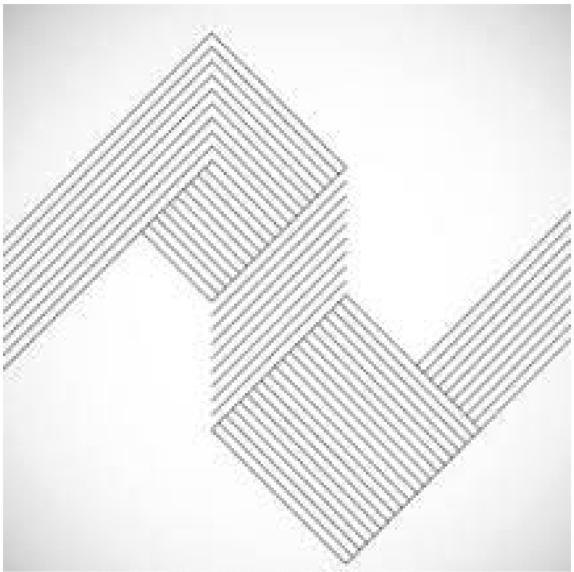
उदाहरण : नोटबुक के किनारे, ब्लैकबोर्ड

इस बात की ओर उनका ध्यान आकर्षित करें कि जब समान्तर रेखाओं के दो युग्म यानी जोड़े होते हैं तो हम दूसरे युग्म के लिए दो तीरों के निशान का उपयोग करते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



चित्र-13

इस चित्र में आपको समान्तर रेखाओं के कितने युग्म दिखाई दे रहे हैं?



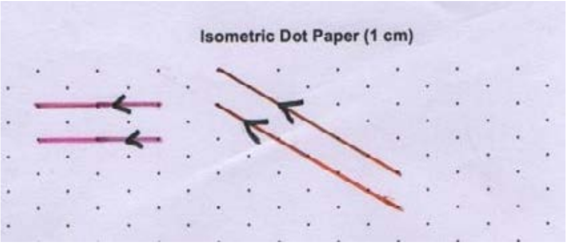
चित्र-14

गतिविधि 5

उद्देश्य : बिन्दुकित काग़ज़ पर समान्तर रेखाओं की पड़ताल करना।

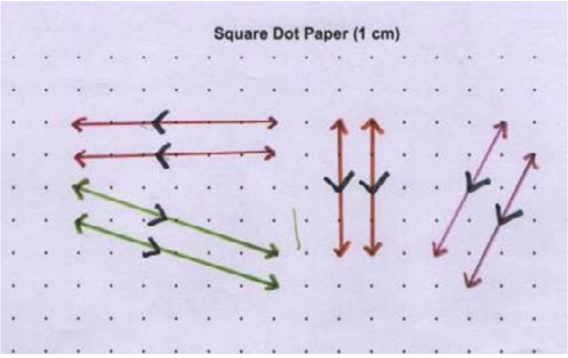
सामग्री : वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़ व समदूरीक बिन्दुकित काग़ज़ (square dot and isometric dot paper)

बच्चे वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़ व समदूरीक बिन्दुकित काग़ज़ पर समान्तर रेखाओं के युग्म बनाने की पड़ताल कर सकते हैं।



चित्र-15

क्या बच्चे इसका कारण बता सकते हैं कि रेखाओं के ये युग्म कभी भी क्यों नहीं मिलेंगे? बच्चों को अपने शब्दों में इसका स्पष्टीकरण देने के लिए कहें।



चित्र-16

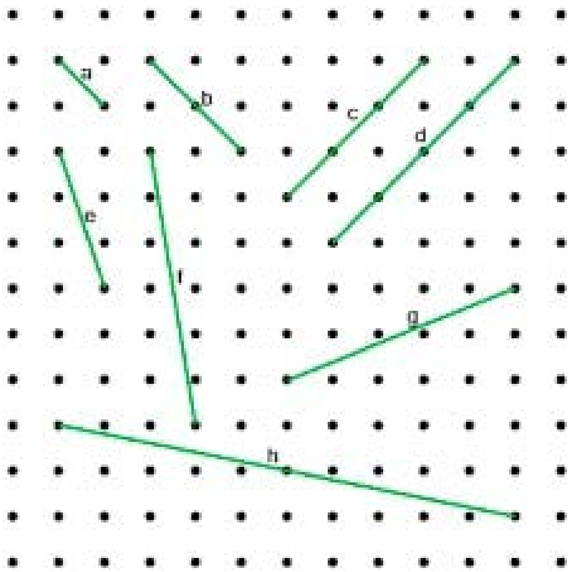
सुनिश्चित करें कि रेखाओं के युग्म समान्तर हों।

ग़लत बिन्दुओं को जोड़ना और असमान्तर रेखाएँ बनाना आसान होता है।

(इसके लिए जुलाई 2018 के *एट राइट एंगल्स* में प्रकाशित टेयरआउट को देखें।)

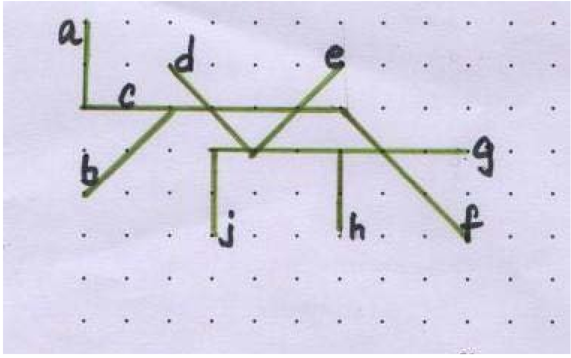
नोट : ऊर्ध्वाधर रेखाएँ, क्षैतिज रेखाएँ और 45° पर झुकी हुई रेखाएँ खींचना आसान होता है (आयताकार बिन्दुकित शीट पर), लेकिन एक अलग ढलान (यानी $m \neq \pm 1$) वाली रेखा के समान्तर रेखा खींचना थोड़ा कठिन है।

क्या बच्चे यह देख पाते हैं कि समान्तर होने के लिए रेखाओं का समान लम्बाई का होना ज़रूरी नहीं है



चित्र-17

चित्र-18 में, रेखाओं के कौन-से युग्म समान्तर हैं?



चित्र-18

गतिविधि 6

उद्देश्य : यह दिखाना कि जब समान्तर रेखाएँ किसी रेखा (जिसे तिर्यक छेदी रेखा कहा जाता है) से इस तरह मिलती हैं कि उनकी केवल स्थिति अलग हो, तो ये सभी रेखाएँ उस रेखा के साथ समान माप के कोण बनाती हैं।

परिभाषा : दी गई रेखाओं के युग्म से गुज़रने वाली एक सीधी रेखा को तिर्यक छेदी रेखा कहते हैं।

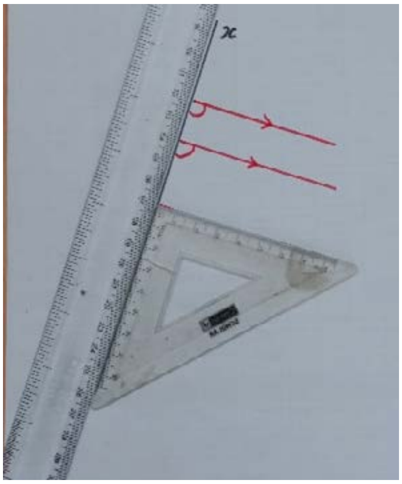
बच्चों को कुछ समान्तर रेखाएँ खींचने के लिए स्केल और सेट स्क्वायर का उपयोग करने के लिए कहें जैसा कि चित्र-19 में दिखाया गया है।

रेखा X एक तिर्यक छेदी रेखा है।

उन कोणों पर ध्यान दें जो रेखाएँ दी गई रेखा X के साथ बनाती हैं। इन कोणों के बारे में आपको क्या लगता है?

यह रेखाएँ तिर्यक छेदी रेखा के साथ समान माप के कोण बनाती हैं।

केवल इन कोणों की स्थितियाँ अलग हैं।



चित्र-19

गतिविधि 7

उद्देश्य : यह दिखाना कि दिए गए एक बिन्दु से दी गई किसी सीधी रेखा के समान्तर केवल एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

सामग्री : सादा काग़ज़

बच्चों को काग़ज़ पर एक सीधी रेखा खींचने के लिए कहें। उन्हें एक ऐसे बिन्दु का पता लगाने और उसे चिह्नित करने के लिए कहें, जो इस रेखा पर न हो। अब उन्हें पिछली गतिविधि की तरह स्केल और सेट स्क्वायर का उपयोग करके दी गई रेखा के समान्तर एक रेखा खींचने के लिए कहें।

वे स्केल को कहाँ रखेंगे?

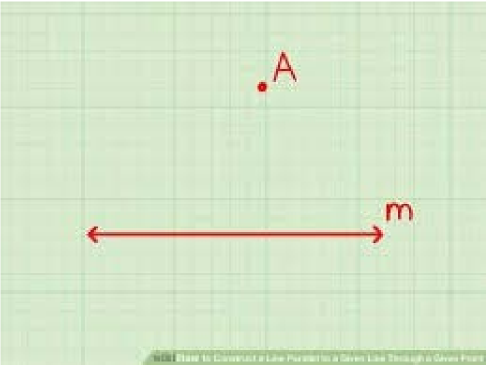
गतिविधि 5 की पिछली स्थिति पर चर्चा करें और देखें कि क्या वे इस स्थिति में भी उस विचार को अपना सकते हैं।

अब उनसे पूछें कि क्या वे उसी बिन्दु से गुज़रने वाली एक और रेखा बना सकते हैं जो पहली रेखा के समान्तर हो।

वे क्या नोटिस करते हैं?

शिक्षक यह बताने में उनकी मदद कर सकते हैं कि दिए गए एक बिन्दु से दी गई किसी सीधी रेखा के समान्तर केवल एक सीधी रेखा हो सकती है।

एक ही बिन्दु से ऐसी कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं जो दी गई सीधी रेखा के समान्तर न हों?



चित्र-20

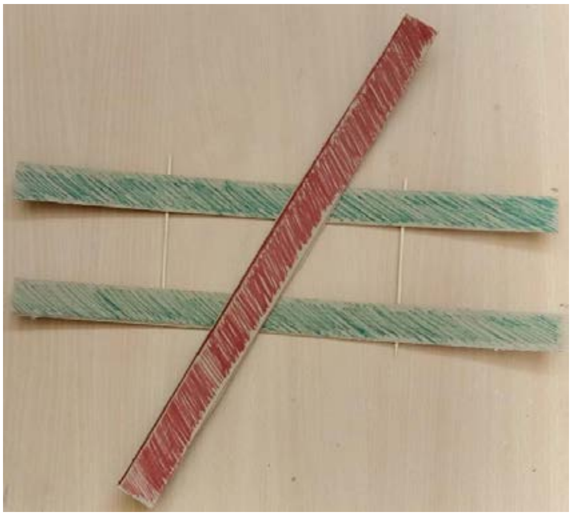
गतिविधि 8

उद्देश्य : तिर्यक छेदी रेखा की धारणा और इससे बनने वाले कोणों पर ध्यान देना।

सामग्री : रंगीन कठोर समान्तर फ्रेम और अलग रंग की एक लम्बी पट्टी

शब्दावली : अन्त:कोण (interior angle)

एक कठोर फ्रेम (ऐसा फ्रेम बनाने के लिए चिपकाई गई पतली पट्टियों की इस तस्वीर पर ध्यान दें) और पट्टी समान्तर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा के गुणों का अध्ययन करने के लिए उपयोगी सामग्री के रूप में काम करती है।

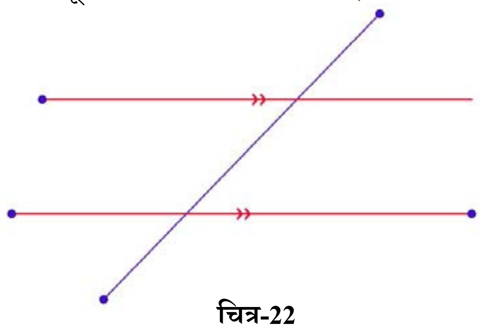


चित्र-21

(यदि यह मॉडल सन्तोषजनक नहीं है, तो बच्चे काग़ज़ पर स्केल रखकर इसके दोनों तरफ़ रेखाएँ खींच सकते हैं, फिर एक तिर्यक छेदी रेखा बनाकर बनने वाले कोणों को माप सकते हैं ।)

शुरुआत में तिर्यक छेदी रेखा को एक ही स्थिति में रखें ताकि आप शीर्ष प्रतिच्छेदन पर बने विभिन्न कोणों को सही तरीक़े से माप सकें। (इसके लिए समान्तर पट्टियों पर क्लिपिंग या स्टेपलिंग करके तिर्यक छेदी पट्टी को मज़बूती से पकड़ें।)

बच्चों से पूछें : "यदि आपको एक कोण (शीर्ष पर प्रतिच्छेदन से बने) का माप मालूम हो, तो क्या आप दूसरे कोणों का पता लगा सकते हैं?"

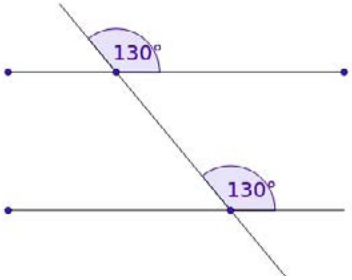


चित्र-22

क्या बच्चे शीर्षाभिमुख कोण और रैखिक युग्म (linear pair) के अपने ज्ञान का उपयोग कर पाते हैं?

बच्चों से कहें कि अब वे नीचे के हिस्से में प्रतिच्छेदन से बने एक कोण को मापें और ज्ञात तथ्यों के आधार पर अन्य कोणों का माप पता करें।

अब वे जाँच करने के लिए चाँदे का उपयोग करके इन कोणों को माप सकते हैं।



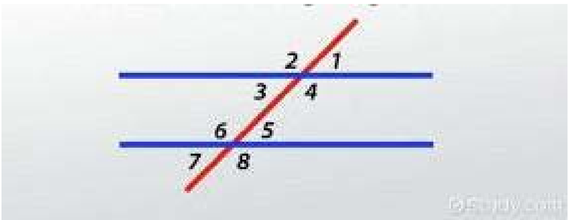
चित्र-23

बच्चों को इसका एक चित्र बनाना चाहिए और इन जानकारियों को दर्ज करना चाहिए। वे क्या नोटिस करते हैं? उन्हें कोणों की माप को लिखने के लिए कहें।

उन्हें एक ही माप के सभी कोणों को एक रंग में रंगने के लिए कहें। उन्होंने कितने रंगों का उपयोग किया?

क्या उन्हें कोई पैटर्न नज़र आता है? यहाँ अलग-अलग प्रकार के कितने कोण हैं?

अब बच्चे तिर्यक छेदी रेखा को एक नई स्थिति में रख सकते हैं और बनने वाले कोणों का अवलोकन कर सकते हैं।



चित्र-24

बच्चों को दूसरा चित्र बनाने और पिछली बार की तरह जानकारियों को लिखने व रंग भरने के लिए कहें।

क्या उन्हें फिर से वही पैटर्न दिखाई देता है? उन्हें चित्र में दिखाए अनुसार कोणों को घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में संख्या देने के लिए कहें।

कोणों के कौन-से युग्म समान हैं?

यह जाँचने के लिए कि इस पैटर्न का दोहराव होता है या नहीं, वे इस प्रक्रिया को दोहरा सकते हैं।

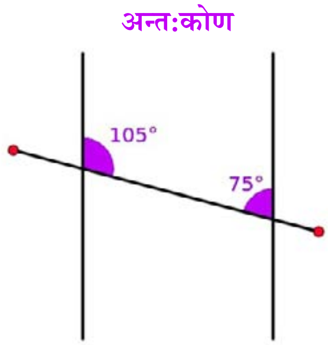
बच्चे इस गुणधर्म (जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती है...) का वर्णन अपने शब्दों में कर सकते हैं और शिक्षक बाद में एक औपचारिक परिभाषा दे सकते हैं।

वे अन्त:कोणों और बाह्य कोणों (exterior angle) के बारे में क्या नोटिस करते हैं?

उनसे पूछें : क्या ऐसी कोई स्थिति है जब सभी 8 कोण समान हों?

एक विशेष तिर्यक छेदी रेखा : बच्चों को यह देखने में सक्षम होना चाहिए कि कुछ परिस्थितियों में एक तिर्यक छेदी रेखा, समान्तर रेखाओं के युग्म के साथ 90 अंश का कोण बना सकती है।

ध्यान दें कि जब समान्तर रेखाओं के दो युग्म आपस में प्रतिच्छेद करते हैं तो प्रत्येक रेखा दूसरे युग्म के लिए तिर्यक छेदी रेखा का कार्य करती है।



चित्र-25



चित्र-26

गतिविधि 9

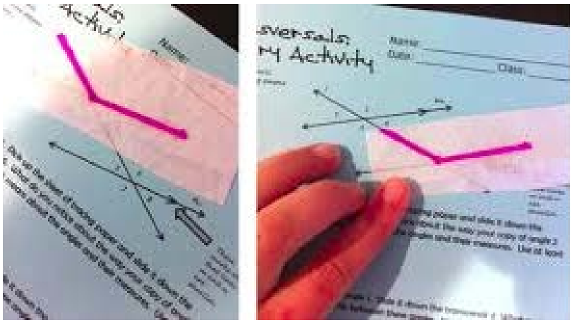
उद्देश्य : यह जाँचना कि दी गई दो रेखाएँ एक-दूसरे के समान्तर हैं या नहीं।

सामग्री : ट्रेसिंग पेपर **शब्दावली :** अन्त:कोण (interior angle)

यह जाँचने के लिए कि युग्म समान्तर हैं या नहीं बच्चों को तिर्यक छेदी रेखा के साथ समान्तर और असमान्तर रेखाओं के युग्म दिए जा सकते हैं।

बच्चे ट्रेसिंग पेपर का उपयोग करके शीर्ष प्रतिच्छेदन पर बनने वाले कोण को कॉपी कर लें और यह जाँचने के लिए कि ये बराबर हैं या नहीं निचले प्रतिच्छेदन से बनने वाले कोणों से इनका मिलान करें।

नोट : ट्रेस करने और जाँचने का यह काम एक धीमी गतिविधि है और संगत कोणों (corresponding angle) को याद रखने में सहायता करता है।



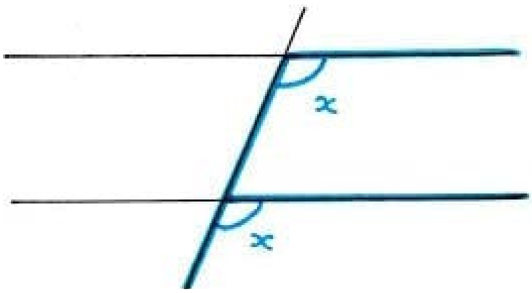
चित्र-27

Source: https://www.mathgiraffe.com/blog/transversals-parallel-lines

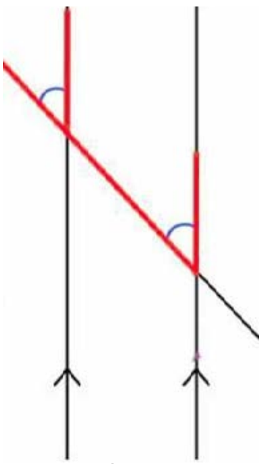
गतिविधि 10

उद्देश्य : संगत कोणों ('F कोणों') को पहचानने में बच्चों की मदद करना।

नोट : बच्चों को विभिन्न कोणों की पहचान करना क्रमिक रूप से सिखाया जाना चाहिए, न कि एक साथ। इस गतिविधि में फोकस संगत कोणों पर है।



चित्र-28

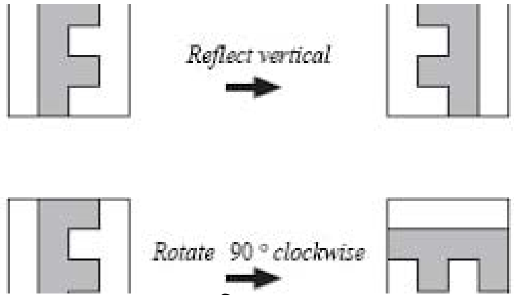


चित्र-29

चित्र-28 और **29** में नीली रेखाएँ और लाल रेखाएँ समान्तर हैं। समान्तर रेखाओं की कोई भी जोड़ी उनसे गुज़रने वाली रेखा के साथ एक F आकृति बनाती है।

चिह्नित कोणों को 'F कोण' कहा जाता है। इनमें बनने वाली 'F आकृति' पर ध्यान दें।

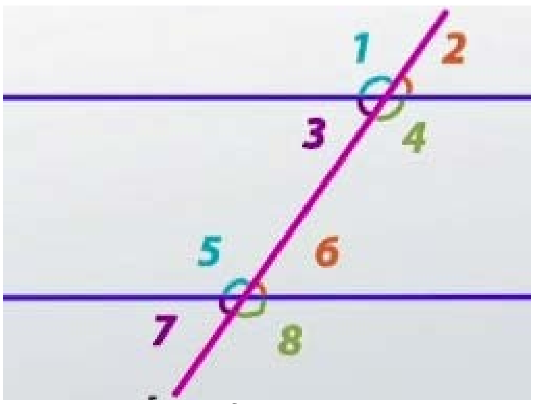
F कोण समान होते हैं। F को विभिन्न अभिमुखों (orientation) में पहचानने के लिए F के प्रतिबिम्ब बनाएँ और F को घुमाएँ।



चित्र-31

यहाँ हम विभिन्न स्थितियों में F को पहचानने में सक्षम होने के लिए F को विभिन्न अभिमुखों में दिखा रहे हैं।

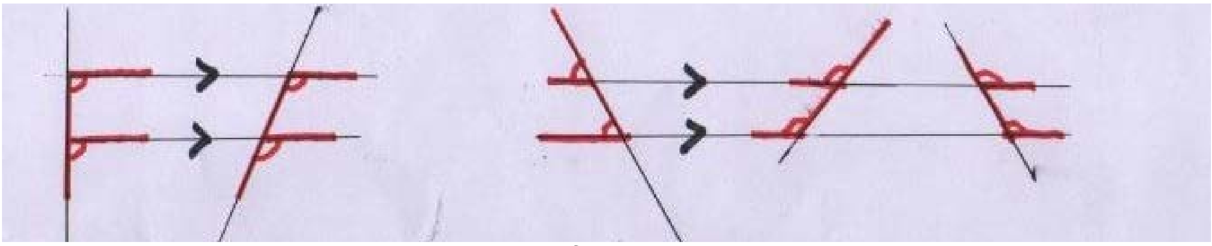
बच्चों को नीचे दिए गए चित्र में, सभी संगत कोणों को सूचीबद्ध करने के लिए अलग-अलग F खोजने चाहिए।



चित्र-32

कोण 1 = कोण 5, कोण 2 = कोण 6, कोण 3 = कोण 7, कोण 4 = कोण 8

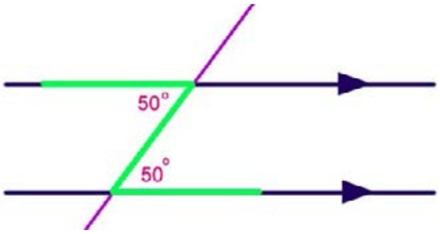
बच्चों को ऐसे कई सवालों का अभ्यास करने के लिए कहें जिसमें उन्हें F (संगत) कोणों की पहचान करने की आवश्यकता हो।



चित्र-30

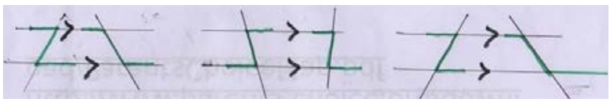
गतिविधि 11

उद्देश्य : एकान्तर कोणों ('Z कोणों') को पहचानने में बच्चों की मदद करना।



चित्र-33

उन्हें Z कोण के प्रतिबिम्ब और घूर्णन को देखने के लिए समान्तर रेखाओं के विभिन्न अभिमुख बनाने को कहें।



चित्र-34

नोट : इस गतिविधि में, फोकस एकान्तर कोणों (alternate angle) पर है। चूँकि बच्चे पहले से ही शीर्षाभिमुख कोणों से परिचित हैं, इसलिए हमें X कोणों पर अधिक ध्यान देने की आवश्यकता नहीं है।

Z आकृति दो समान्तर रेखाओं और एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा बनती है, जैसा कि चित्रों में दिखाया गया है।

यहाँ फिर से, बच्चों को Z आकृति के घुमावों को पहचान पाने में सक्षम होना चाहिए। ऊपर वाले चित्र में, हम Z के विभिन्न अभिमुख देखते हैं।

Z कोण एक-दूसरे के बराबर क्यों हैं?

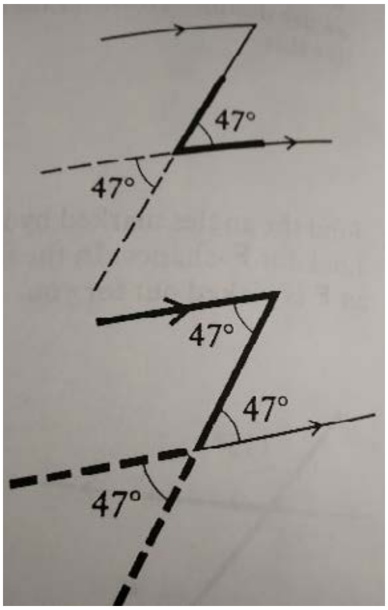
ध्यान दें कि जब हम दोनों रेखाओं को आगे बढ़ाते हैं तो क्या होता है। रेखाएँ अब एक X कोण बनाती हैं।

बच्चों को पता है कि X में शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।

क्या वे यहाँ F (संगत कोण) भी देख सकते हैं?

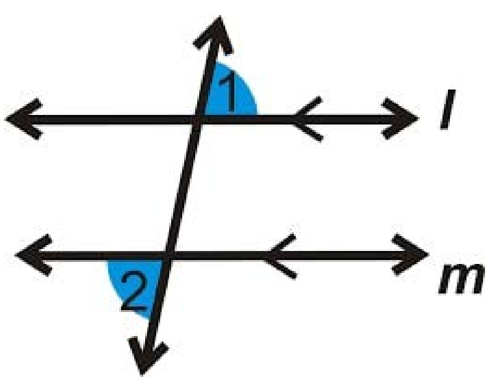
क्या इन तथ्यों से हम यह देख सकते हैं कि Z के दोनों कोण बराबर हैं?

बच्चों को ऐसे कई सवालों का अभ्यास करने के लिए कहें जिनमें उन्हें Z (एकान्तर) कोणों का पता लगाने की आवश्यकता हो।

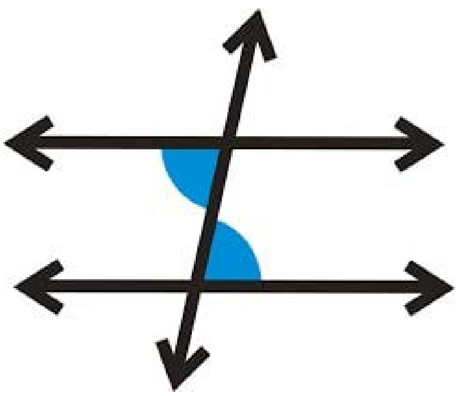


चित्र-35

उन्हें बाह्य एकान्तर कोण और अन्त:एन्कातर कोण के बीच का अन्तर दिखाएँ।



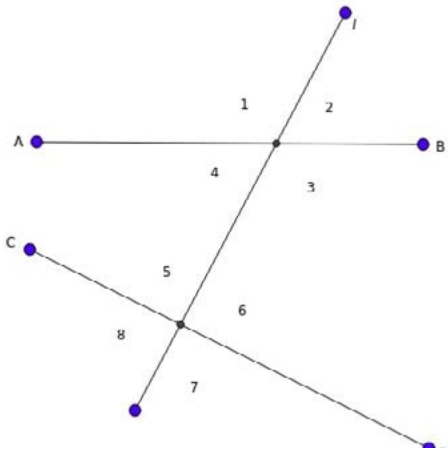
चित्र-36



चित्र-37

वे ट्रेसिंग पेपर का उपयोग करके यह जाँच सकते हैं कि एकान्तर कोण समान होते हैं।

अन्त:एकान्तर कोणों का मिलान करने के लिए ट्रेसिंग पेपर को 180° से घुमाएँ।



चित्र-38

बच्चों को असमान्तर रेखाओं की एक जोड़ी, जिसे एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटा गया है, बनाने और इससे बनने वाले कोणों को मापने के लिए कहें। पहले के निष्कर्षों से इसकी तुलना कैसे की जा सकती है?

क्या यहाँ भी F कोण बराबर होंगे? Z कोण के बारे में आपको क्या लगता है?

खेल 1

उद्देश्य : शब्दावली का अभ्यास।

खिलाड़ी : 2 से 4

शब्दावली : संगत कोण, एकान्तर कोण, अन्त:एकान्तर कोण, बाह्य एकान्तर कोण, रेखीय युग्म, शीर्षाभिमुख कोण

ज़मीन पर एक चित्र बनाएँ और बच्चों को दिए गए आदेशों पर प्रतिक्रिया करते हुए हॉपस्कॉच खेलने के लिए कहें।

इस खेल में एक बच्चा आदेश देगा और दूसरे बच्चे को अपने दोनों पैर उचित स्थानों पर रखने होंगे। (**चित्र-39**)

खेल के आरम्भ में दूसरा बच्चा चित्र के बाहर शुरुआत (start) की स्थिति में होगा।

आदेश 1 : संगत (दूसरे बच्चे को अपना एक पैर एक कोण पर और दूसरा पैर उसके संगत कोण में रखकर संगत कोणों की जोड़ी पर कूदना होगा)

आदेश 2 : रैखिक युग्म (अब दूसरे बच्चे को एक रैखिक युग्म पर कूदना होगा)

ग़लती होने पर वह हार जाएगा और खेलने की बारी पहले बच्चे की आ जाएगी।

आपको इस खेल की गति को तेज़ रखना होगा, यानी, आदेशों को बिना किसी देरी के आना होगा ताकि प्रतिक्रियाएँ भी जल्दी से हों।



चित्र-39

गतिविधि 12

उद्देश्य : यह पता लगाना कि लाइन k; लाइन m के समान्तर है या नहीं, जबकि लाइन k; लाइन n के समान्तर हो और लाइन n; लाइन m के समान्तर हो।

सामग्री : बिन्दुकित काग़ज़

दो सीधी रेखाएँ जो एक तीसरी रेखा के समान्तर हों, क्या वे एक-दूसरे के समान्तर होंगी?

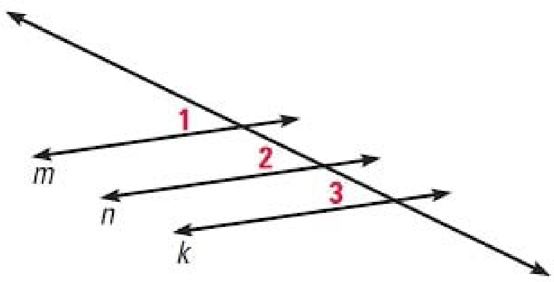
बच्चों से कहें कि एक सीधी रेखा खींचें और इस सीधी रेखा के लिए दो समान्तर रेखाएँ खींचें।

अब उन्हें यह जाँचने के लिए कहें कि क्या दूसरी और तीसरी रेखा एक-दूसरे के समान्तर हैं।

बच्चे यह जाँच कैसे कर रहे हैं?

क्या वे F कोणों का उपयोग कर रहे हैं? या Z कोणों का?

सीधी रेखाएँ जिनमें से प्रत्येक एक उभयनिष्ठ सीधी रेखा के समान्तर होती हैं, एक-दूसरे के भी समान्तर होती हैं।



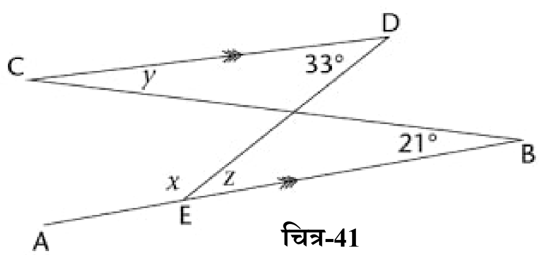
चित्र-40

क्या दो सीधी प्रतिच्छेदी रेखाएँ कभी एक तीसरी सीधी रेखा के समान्तर हो सकती हैं?

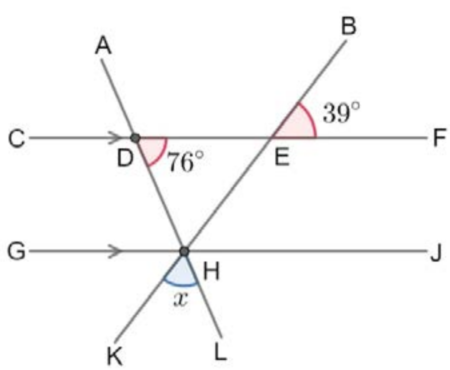
गतिविधि 13

उद्देश्य : सवाल हल करना।

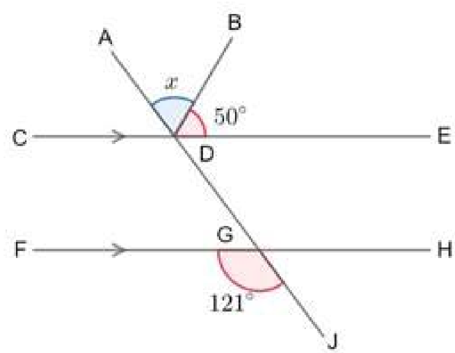
बच्चों को अब सवालों को हल करने के लिए समान्तर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखा के गुणधर्मों की अपनी समझ का उपयोग करने में सक्षम होना चाहिए। वे संगत और एकान्तर कोणों का पता लगाने के लिए F और Z कोणों की खोज कर सकते हैं।



चित्र-41



चित्र-42



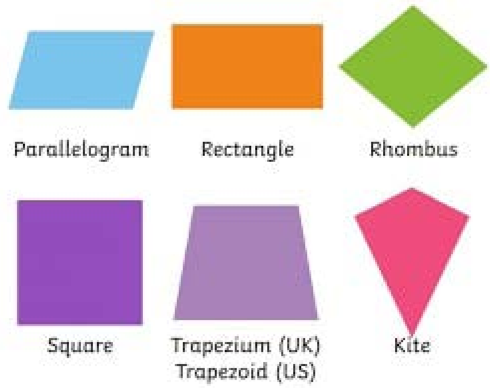
चित्र-43

गतिविधि 14

उद्देश्य : बहुभुजों, डिज़ाइन और त्रिविमीय आकृतियों में समान्तर रेखाओं की पड़ताल करना।

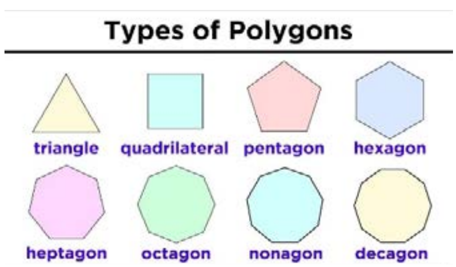
सामग्री : विभिन्न चतुर्भुजों और बहुभुजों के स्टेंसिल्स

बच्चे विभिन्न आकृतियों का अध्ययन कर सकते हैं और जाँच सकते हैं कि उनकी सम्मुख भुजाएँ समान्तर हैं या नहीं। वे इन आकृतियों की आउटलाइन बनाने के लिए इनके स्टेंसिल्स का उपयोग कर सकते हैं और जाँच सकते हैं कि सम्मुख भुजाओं के जोड़े एक-दूसरे के समान्तर हैं या नहीं।



चित्र-44

बच्चे विभिन्न बहुभुजों का अध्ययन कर सकते हैं और विभिन्न बहुभुजों की समान्तर भुजाओं को चिह्नित कर सकते हैं।



चित्र-45

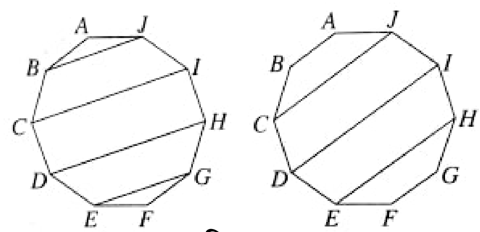
क्या एक त्रिभुज में समान्तर भुजाएँ हो सकती हैं? क्यों? यदि पतंग में समान्तर भुजाएँ हों तो क्या होगा?

बच्चों को ऐसे समबहुभुज बनाने के लिए कहें जिनमें भुजाओं की संख्या अलग-अलग हो। वे क्या नोटिस करते हैं?

क्या सभी समबहुभुजों (regular polygon) में समान्तर भुजाओं के जोड़े होते हैं?

बच्चों को इस बात का पता लगाने दें कि जिन बहुभुजों में भुजाओं की संख्या सम होती हैं, उनमें समान्तर भुजाओं के जोड़े होते हैं; जबकि बाक़ी में नहीं होते हैं।

वे समबहुभुजों के विकर्ण भी बना सकते हैं और जाँच सकते हैं कि वे समान्तर हैं या नहीं।



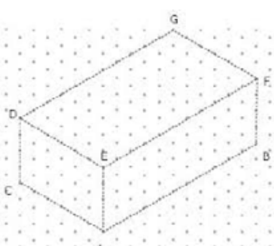
चित्र-46

अब बच्चों को ऐसे समबहुभुज बनाने के लिए कहें जिनमें भुजाओं की संख्या अलग-अलग हो और उनसे इनके विकर्ण भी बनाने के लिए कहें। समान्तर विकर्णों वाला एक समबहुभुज बनाने के लिए भुजाओं की न्यूनतम संख्या क्या होगी?

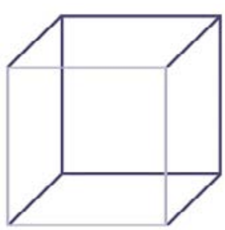
भुजाओं की सम संख्या वाले समबहुभुजों में, क्या कोई ऐसी आकृति है जिसके एक विकर्ण के समान्तर कोई अन्य विकर्ण न हो? क्या कोई ऐसी भुजाएँ हैं जो इसके समान्तर हों?

क्या ऐसा कोई बहुभुज है जिसमें समान्तर विकर्णों के दो युग्म हों?

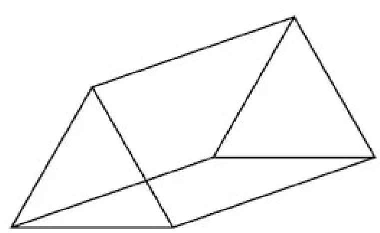
वे समदूरीक काग़ज़ पर खींची गई विभिन्न त्रिविमीय वस्तुओं का अध्ययन भी कर सकते हैं और समान्तर रेखाओं को नाम दे सकते हैं।
परिभाषा पर ध्यान दें कि समान्तर रेखाएँ एक ही तल पर स्थित होती हैं।



चित्र-47



चित्र-48



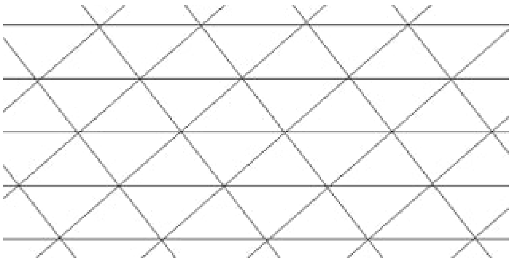
चित्र-49

गतिविधि 15

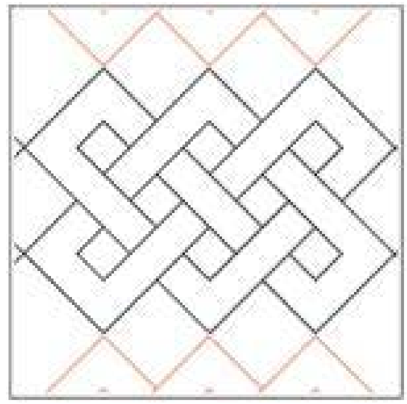
उद्देश्य : समान्तर रेखाओं वाली कलाकृतियों का अध्ययन करना।

सामग्री : बिन्दुकित काग़ज़ और रंगोली डिज़ाइन, बॉर्डर डिज़ाइन और सेल्टिक डिज़ाइन के कुछ चित्र।

कई सारे रंगोली डिज़ाइन, सेल्टिक डिज़ाइन और बॉर्डर डिज़ाइन समान्तर रेखाओं का उपयोग करके बनाए जाते हैं। बच्चे ऐसे डिज़ाइनों का अध्ययन कर सकते हैं और इन्हें बनाना सीख सकते हैं।



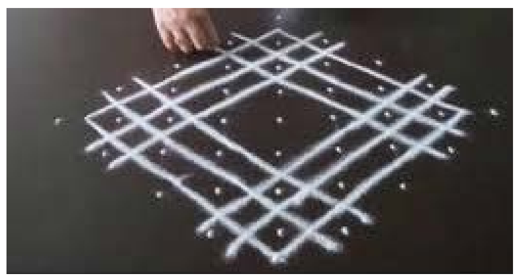
चित्र-50



चित्र-51



चित्र-52



चित्र-53

गतिविधि 16

उद्देश्य : सूचना के अनुसार स्थानों का पता लगाना।

सामग्री : एक इलाक़े का नक़्शा

समूह परियोजना : कई परियोजनाएँ होती हैं जिनमें कुछ दिशानिर्देशों के आधार पर एक नक़्शा बनाने के लिए बच्चों को समान्तर रेखाओं और तिर्यक छेदी रेखाओं की अपनी समझ को उपयोग करने की आवश्यकता होती है।

एक इलाक़े का नक़्शा बनाएँ जिसमें तीन सड़कें एक-दूसरे के समान्तर हों और एक सड़क ऐसी हो जो सभी तीन सड़कों को काटती हो।

अपनी सड़कों को नाम दें, उदाहरण के लिए एम.जी. मार्ग, रामानुजम मार्ग।



चित्र-54

अब बच्चों को कुछ संकेत दीजिए। उदाहरण के लिए,

स्कूल और अस्पताल सर्वांगसम एकान्तर बाह्य कोणों में स्थित हैं।

दवा की दुक़ान और अस्पताल संगत कोणों में स्थित हैं।

गैस स्टेशन और बस स्टॉप शीर्षाभिमुख स्थानों पर हैं।

अस्पताल और किताब की दुकान तिर्यक छेदी मार्ग के एक ही तरफ़ बाह्य स्थानों पर हैं।

दिए गए संकेतों के अनुरूप नक़्शा बनाने के लिए बच्चे समूहों में काम करते हैं। क्या उनके नक़्शे समान हैं?

साभार :

- एसएमपी (कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस द्वारा प्रकाशित स्कूल मैथमेटिक्स प्रोजेक्ट) से सामग्री।
- मैं अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की सुश्री स्वाती सरकार के बहुमूल्य सुझावों और फीडबैक के लिए विशेष रूप से धन्यवाद व्यक्त करना चाहूँगी।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली, सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्रप्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह विभिन्न विषय पढ़ाती हैं, जैसे कि गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू। पिछले कुछ वर्षों से वह शिक्षक-शिक्षा आउटरीच कार्य में संलग्न हैं। वर्तमान में वह पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर एससीईआरटी (आन्ध्रप्रदेश) के साथ काम कर रही हैं। 1990 के दशक में उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इसे 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से भी जाना जाता है। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथिमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University's At Right Angles (a resource for school mathematics), जुलाई, 2020 में प्रकाशित Parallel Lines का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं **कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही